Homologie des posets

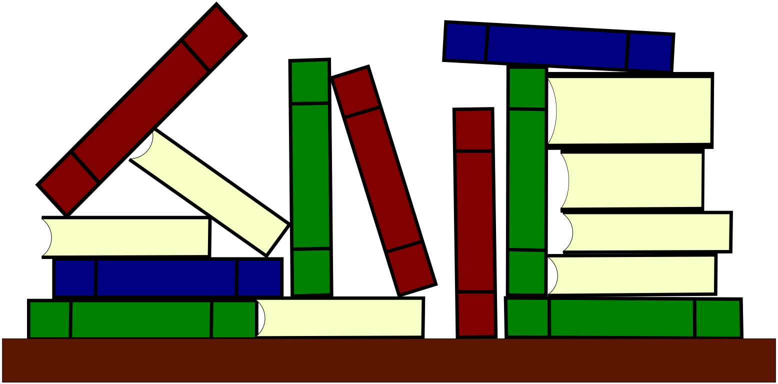
Bérénice Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Mercredi 05 Février 2014

Sommaire

Ensemble partiellement ordonné

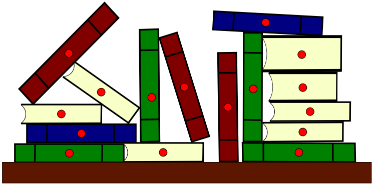


Ensemble partiellement ordonné

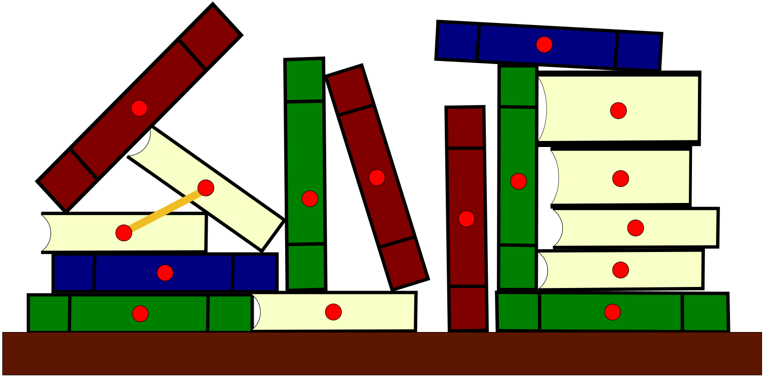
Définition

Un Poset est un ensemble E muni d'une relation d'ordre partiel $\leq$:

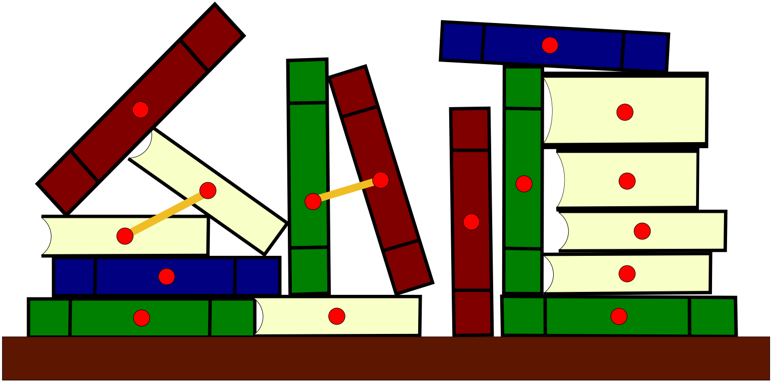
- $x \leq x$ *(Réflexivité)*
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \rightarrow x = y$ *(Antisymétrie)*
- $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \rightarrow x \leq z$ *(Transitivité)*



Ensemble partiellement ordonné



Ensemble partiellement ordonné



Ensemble partiellement ordonné

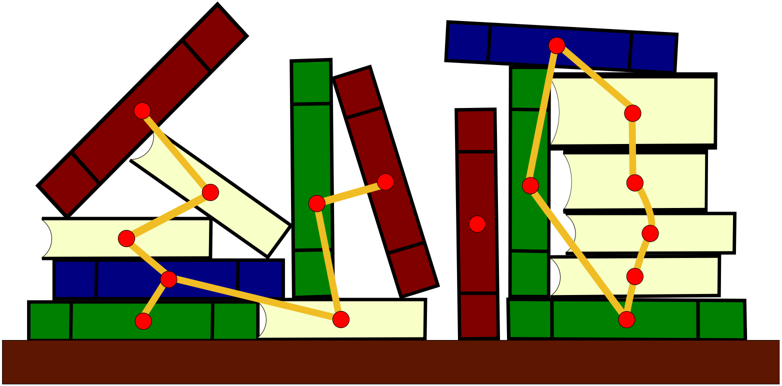
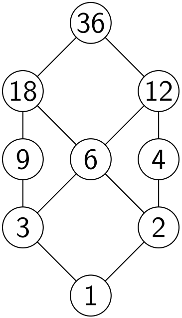


Diagramme de Hasse

Relations de couverture : y *couvre* x si $x < y$ et $\nexists z, x < z < y$.
L'ensemble des couples (x, y) tels que y couvre x s'appelle l'ensemble des relations de couverture.

Définition

Le diagramme de Hasse d'un poset P est un graphe dont les sommets sont les éléments de P et donc les arêtes sont les relations de couverture dans P.



Poset des

diviseurs de 36

Ensemble partiellement ordonné

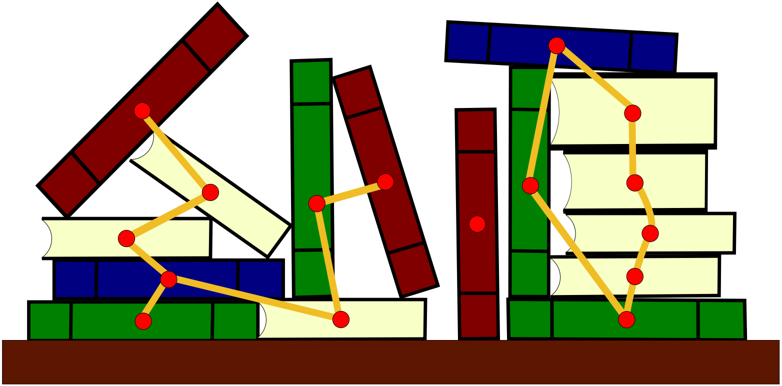
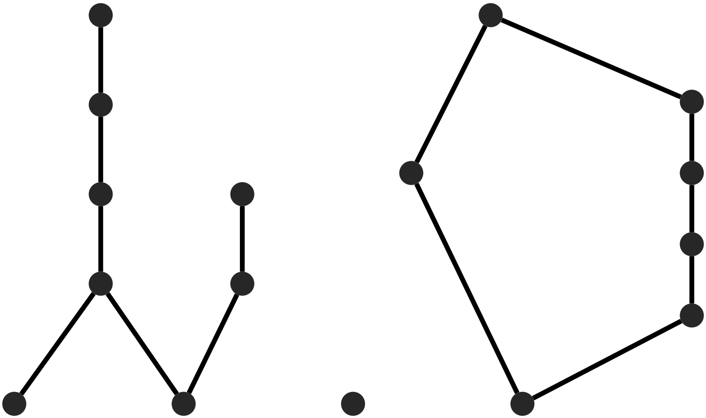
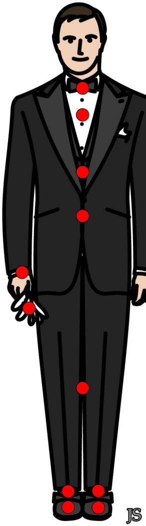


Diagramme de Hasse



Autre exemple de poset : le poset des vêtements

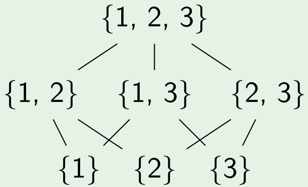


Exemples moins concrets

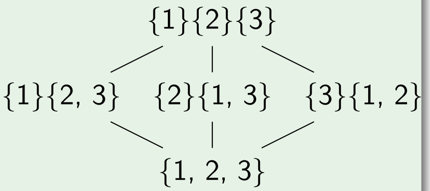
Quelques posets

- Poset des fonctions à valeurs réelles
- Poset sur $\mathbb{R}[X, Y]$ $X^aY^b < X^\alpha Y^\beta \Leftrightarrow a < \alpha$ et $b < \beta$

- Poset des sous-ensembles

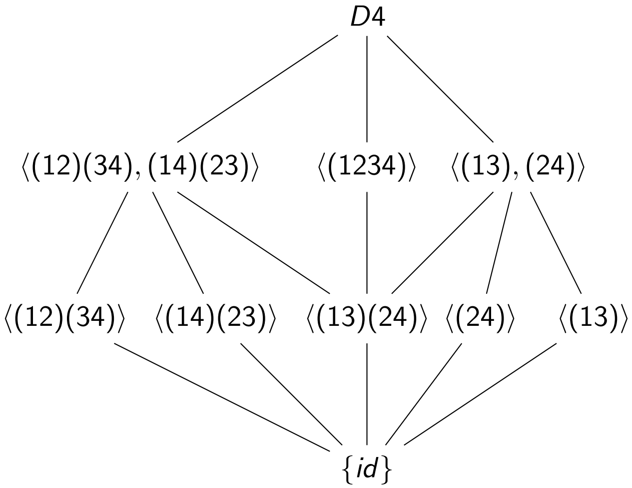


- Poset des partitions



- Poset des sous-groupes de D_4, le groupe des automorphismes du carré

Poset des sous-groupes de D_4, le groupe des automorphismes du carré

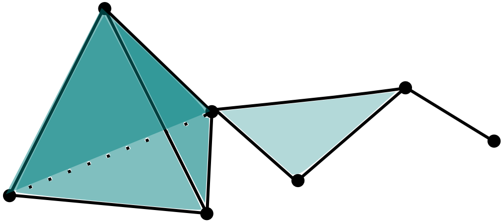


Complexe simplicial associé à un poset

Définition

Un Complexe simplicial Δ *sur un ensemble fini* V *est un ensemble de sous-ensembles de* V *tels que*

- $\{v\} \in \Delta, \forall v \in V$,
- $F \subseteq G$ *et* $G \in \Delta \Rightarrow F \in \Delta$.
  La dimension du complexe est donnée par $\max_{F \in \Delta} \dim F$.



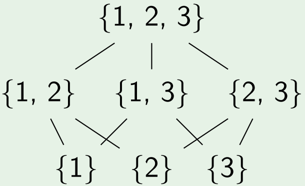
Complexe simplicial associé à un poset

A chaque poset P, on associe un complexe simplicial $\Delta(P)$ appelé complexe d'ordre tel que :

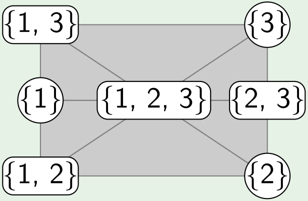
- Les sommets de $\Delta(P)$ sont les éléments de P,
- Les faces (éléments) de $\Delta(P)$ sont les chaînes de P.

Exemples

- Poset des sous-ensembles



Complexe associé



Exemples (suite)

- Poset des partitions

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \{1\}\{2\}\{3\} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{1\}\{2,3\} \arrow[dr] & \{2\}\{1,3\} \arrow[d] & \{3\}\{1,2\} \arrow[dl] \\
 & \{1,2,3\} &
\end{tikzcd}
$$

Complexe associé

$\Rightarrow$

Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$
poset P *borné* = minimum $\hat{0}$ et maximum $\hat{1}$
Pour P un poset quelconque, on note $\hat{P}$, le poset P complété d'un minimum et d'un maximum et $\bar{P}$, le poset P où l'on a ôté, s'ils existent, le maximum et le minimum.

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x, x) = 1, \qquad \forall x \in P$$

$$\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, l'invariant de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$

Calcul de la fonction de Möbius sur quelques posets

Si Div_n est le poset des diviseurs de n, $\mu(d, m) = \mu(m/d)$, où μ est la fonction de Möbius classique telle que :

$$\mu(n) = (-1)^k, \text{si } n = p_1 \dots p_k, 0 \text{ sinon}$$

Calcul dans le poset des diviseurs de 36

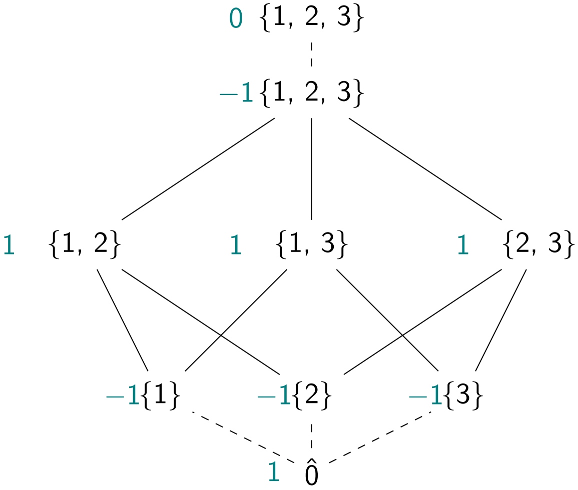
$\mu(1, 36) = 0$, $\mu(12, 36) = -1$

Proposition (Inversion de Möbius)

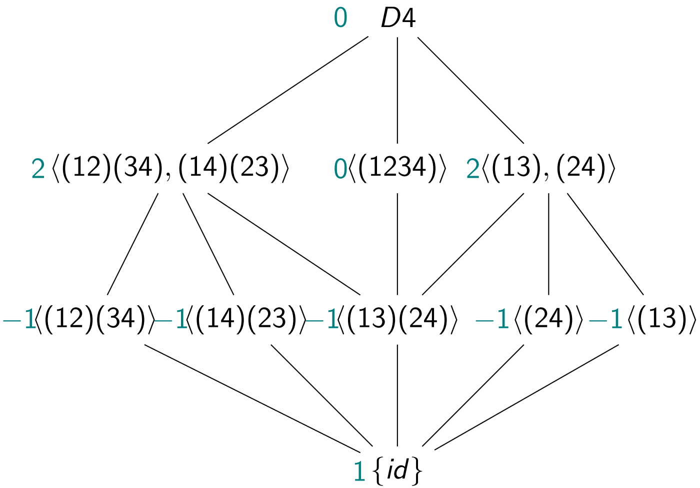
Soit P un poset et $f, g : P \to \mathbb{C}$. Alors, on a :

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x) \Leftrightarrow f(y) = \sum_{x \leq y} \mu(x, y) g(x).$$

Sur le poset des sous-ensembles



Sur le poset des sous-groupes de D_4



Fonction de Möbius et caractéristique d'Euler

Définition

La caractéristique d'Euler réduite d'un complexe simplicial est :

$$\tilde{\chi}(\Delta) := \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} (-1)^i f_i(\Delta),$$

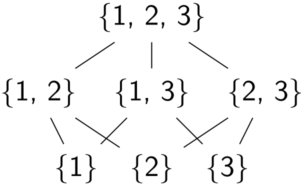
où $f_i(\Delta)$ est le nombre de i-faces de Δ.

Proposition (Théorème de Philip Hall)

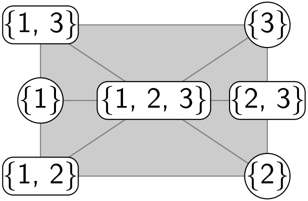
$$\mu(\hat{P}) = \tilde{\chi}(\Delta(P))$$

Exemple de calcul de la caractéristique d'Euler

- Poset des sous-ensembles



Complexe associé



$$\tilde{\chi}(\Delta) := \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} (-1)^i f_i(\Delta) = -1 + 7 - 12 + 6 = 13 - 13 = 0$$

Homologie d'un poset

L'homologie d'un poset est l'homologie simpliciale réduite de son complexe d'ordre.
Pour tout poset P et tout entier naturel j, on définit l'espace des chaînes $C_j(P)$ comme étant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des $j+1$-chaînes sur P. On définit l'application de bord $\partial_j : C_j(P) \to C_{j-1}(P)$ par :

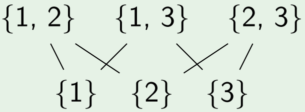
$$\partial(x_0 < x_1 < \ldots < x_j) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i (x_0 < x_1 < \ldots < \hat{x}_i < \ldots < x_j).$$

On a $\partial_{j-1}\partial_j = 0$.
L'homologie mesure le défaut d'exactitude. Elle est définie par :

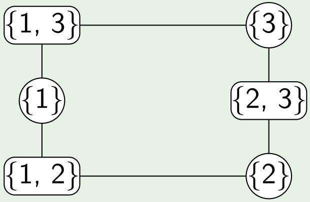
$$\tilde{H}_j(P) = \ker \partial_j / \operatorname{im} \partial_{j+1}.$$

Exemple

- Poset des sous-ensembles privé de son maximum



Complexe associé



- C_1 de base :

$$\{\{1\}-\{1,3\},\{1\}-\{1,2\},\{2\}-\{1,2\},\\ \{2\}-\{2,3\},\{3\}-\{1,3\},\{3\}-\{2,3\}\}$$

- C_0 de base :

$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

Lien avec la fonction de Möbius

Théorème

$$\mu(\hat{P}) = \tilde{\chi}(\Delta(P)) = \sum_{i=-1}^{\dim \Delta} (-1)^i \dim \tilde{H}_i(\Delta(P))$$

Posets décortiquables/épluchables

Posons $\langle F \rangle = \{G : G \subseteq F\}$.

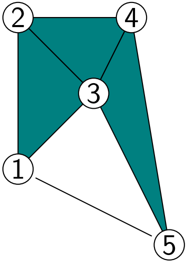
Définition

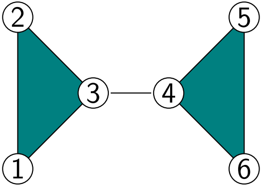
Un poset est dit décortiquable si on peut ordonner ses facettes (faces maximales) en $F_1, \ldots, F_t$ de telle sorte que le sous-complexe $\left(\cup_{i=1}^{k-1} \langle F_i \rangle\right) \cap \langle F_k \rangle$ soit pure (toute ces facettes ont la même dimension) et de dimension $\dim F_k - 1$ pour tout $k = 2, \ldots, t$.

Proposition (Björner et Wachs)

Un poset décortiquable a tous ses groupes d'homologie triviales, sauf celui de degré maximal.

Exemples

- 

est décortiquable,


n'est pas décortiquable.
- Les posets des partitions et des sous-ensembles sont décortiquables.

Application

Définition

Un groupe G est résoluble s'il existe une suite finie $G_0, G_1, \ldots, G_n$ de sous-groupe de G tel que :

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots G_n = G$$

où, pour tout $i \in [0, n-1]$, G_i est un sous-groupe distingué de G_{i+1}, et le quotient G_{i+1}/G_i est abélien

Exemples : $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, les groupes nilpotents

Théorème (Shareshian)

Le poset des sous-groupes d'un groupe fini G est décortiquable (shellable) si et seulement si G est résoluble.

Merci de votre attention !

Michelle Wachs
Poset topology.